

Soluzione esame 10 luglio 2025

ESERCIZIO 1

Q. $f(x) = \frac{\ln(3x)}{\ln(x^2)}$

■ DOMINIO

$$\begin{cases} \ln(x^2) \neq 0 \\ 3x > 0 \\ x^2 > 0 \end{cases} \rightarrow \begin{cases} x^2 \neq 1 \rightarrow x \neq \pm 1 \\ x > 0 \end{cases}$$

$$D = (0, 1) \cup (1, +\infty)$$

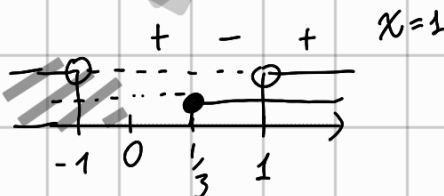
■ No intersezione asse y $0 \notin D$

■ STUDIO DEL SEGNO e INT. ASSE X

$$\frac{\ln(3x)}{\ln(x^2)} \geq 0$$

$$\begin{aligned} \cdot \ln(3x) &\geq 0 \\ 3x &\geq 1 \\ x &\geq \frac{1}{3} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \cdot \ln(x^2) &> 0 \\ x^2 &> 1 \\ x &< -1 \vee x > 1 \end{aligned}$$



POSITIVA in $(0, \frac{1}{3}) \cup (1, +\infty)$
 NEGATIVA in $(\frac{1}{3}, 1)$
 NULLA in $A = (\frac{1}{3}, 0)$



■ LIMITI AGLI ESTREMI DEL DOMINIO

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{\ln(3x)}{\ln(x^2)} = \frac{-\infty}{-\infty} = \text{F.I.}$$

APPLICO IL T. DI DE L'HOSPITAL

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{\ln(3x)}{\ln(x^2)} \stackrel{\text{DH}}{=} \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{\frac{1}{3x}}{\frac{1}{x^2} \cdot 2x} = \frac{1}{2}$$

$$\lim_{x \rightarrow 1^-} \frac{\ln(3x)}{\ln(x^2)} = \frac{0^-}{0^-} = -\infty ; \lim_{x \rightarrow 1^+} \frac{\ln(3x)}{\ln(x^2)} = \frac{0^+}{0^+} = +\infty$$

$x=1$ ASINTOTO VERTICALE COMPLETO

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\ln(3x)}{\ln(x^2)} \stackrel{\text{DH}}{=} \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{1}{2} = \frac{1}{2} \rightarrow y = \frac{1}{2} \text{ ASINTOTO ORIZZONTALE DESTRO}$$

DERIVATA PRIMA

$$f'(x) = \frac{\frac{1}{x} \ln(x^2) - \ln(3x) \cdot \frac{1}{x^2} \cdot 2x}{\ln^2(x^2)} = \frac{\frac{\ln(x^2)}{x} - 2 \frac{\ln(3x)}{x}}{\ln^2(x^2)} = \frac{2\ln(x) - 2[\ln(3) + \ln(x)]}{x(2\ln(x))^2} = \frac{2[\cancel{\ln(x)} - \ln(3) - \cancel{\ln(x)}]}{2x \ln^2(x^2)} = \frac{-\ln(3)}{2x \ln^2(x)} \geq 0$$

$$\bullet -\ln(3) \geq 0$$

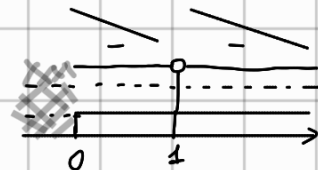
$\emptyset$

$$\bullet 2x > 0$$

$x > 0$

$$\ln^2(x) > 0$$

$\forall x \in D$



f è DECRESCENTE $\forall x \in D$

f è CRESCENTE MAI

f è STAZIONARIA MAI $\Rightarrow$ No P.TI MAX e MIN

DERIVATA SECONDA

$$f''(x) = \frac{0 - (-\ln(3)) \cdot 2[\ln^2(x) + 2\ln(x) \cdot \frac{1}{x}]}{[2x \ln^2(x)]^2}$$

$$= \frac{\ln(3) \cdot 2[\ln^2(x) + 2\ln(x)]}{4x^2 \ln^4(x)} = \frac{\ln(3) \ln^2(x) + 2\ln(3) \ln(x)}{2x^2 \ln^4(x)} = \frac{\ln(3) \ln(x) [\ln(x) + 2]}{2x^2 \ln^4(x)} = \frac{\ln(3) [\ln(x) + 2]}{2x^2 \ln^3(x)}$$

$$\bullet \ln(3) > 0$$

$\forall x \in D$

$$\bullet 2x^2 > 0$$

$\forall x \in D$

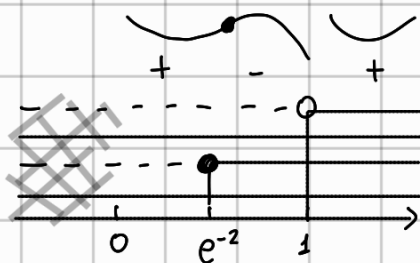
$$\bullet \ln(x) + 2 > 0$$

$$\ln(x) > -2$$

$$x > e^{-2} \approx 0.13$$

$$\bullet \ln(x) > 0$$

$x > 1$



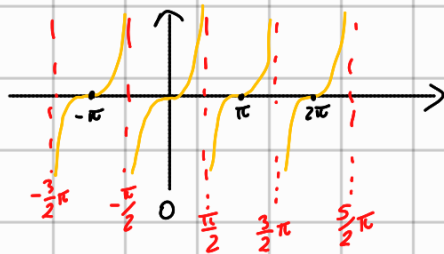
f è CONVESSA $x \in (0, e^{-2}) \cup (1, +\infty)$

f è CONCAVA $x \in (e^{-2}, 1)$

f PRESENTA UN P.TO DI FLESSO
 $F = (e^{-2}, \frac{2-\ln(3)}{4})$

$$f(e^{-2}) = \frac{\ln(3e^{-2})}{\ln(e^{-2})^2} = \frac{\ln(3) - 2}{4} \approx 0.225$$

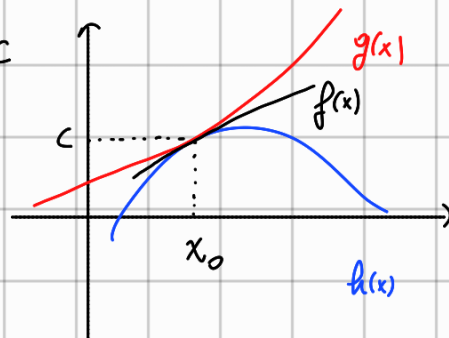
b. $\text{tg} : \left(-\frac{\pi}{2} + k\pi, \frac{\pi}{2} + k\pi\right) \longrightarrow \mathbb{R}$
 $\text{tg}(x) = \frac{\sin(x)}{\cos(x)}$



C. TEOREMA DEL CONFRONTO

Date $f(x), g(x), h(x)$ definite in un intorno di un punto x_0 tali che $h(x) \leq f(x) \leq g(x)$

SE $\lim_{x \rightarrow x_0} h(x) = \lim_{x \rightarrow x_0} g(x) = C$ ALLORA $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = C$



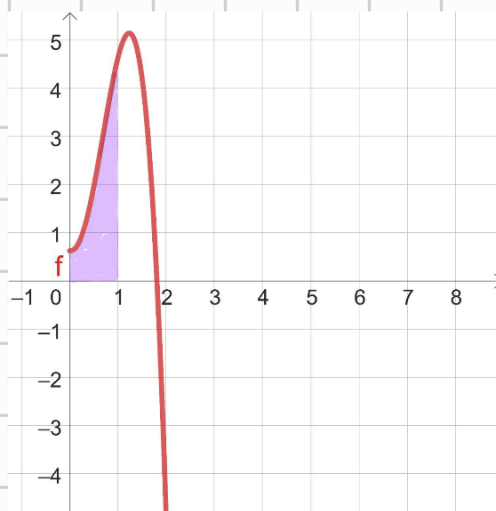
ESERCIZIO 2

$$f(x) = -12x^3 + 16\sqrt{x^5} + 3e^{-\frac{\pi}{2}x}$$

$$\begin{aligned} \text{a. } \int (-12x^3 + 16x^{\frac{5}{2}} + 3e^{-\frac{\pi}{2}x}) dx &= -\cancel{12}^3 \frac{x^4}{4} + 16 \frac{x^{\frac{7}{2}}}{\frac{7}{2}} + 3e^{-\frac{\pi}{2}x} x \\ &= -3x^4 + \frac{32}{7} \sqrt{x^7} + 3e^{-\frac{\pi}{2}x} x \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \text{b. } \int_0^1 (-12x^3 + 16\sqrt{x^5} + 3e^{-\frac{\pi}{2}x}) dx &= \left[-3x^4 + \frac{32}{7} \sqrt{x^7} + 3e^{-\frac{\pi}{2}x} x \right]_0^1 = -3 + \frac{32}{7} + 3e^{-\frac{\pi}{2}} - 0 \\ &= \frac{-21+32}{7} + 3e^{-\frac{\pi}{2}} = \frac{11}{7} + 3e^{-\frac{\pi}{2}} \approx 2.195 \end{aligned}$$

c. Il valore trovato corrisponde alla misura dell'area evidenziata in viola.



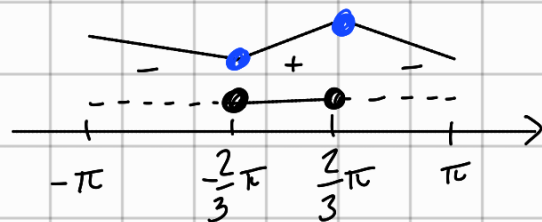
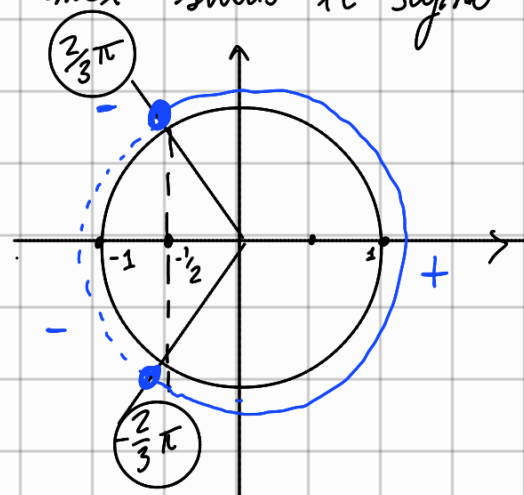
ESERCIZIO 3 Per calcolare il p.to di max studio il segno della derivata prima

$$\begin{aligned} B'(x) &= 2\cos(x) + 1 \geq 0 \\ \cos(x) &\geq -\frac{1}{2} \end{aligned}$$

Si raggiunge il massimo per $x = \frac{2}{3}\pi$
cioè

$$h = \frac{12}{\pi} \left(\frac{2}{3}\pi \right) + 12 = 8 + 12 = 20$$

dopo 20 ore dall'inizio dell'esperimento



$$\begin{aligned} B\left(\frac{2}{3}\pi\right) &= 2\sin\left(\frac{2}{3}\pi\right) + \frac{\pi}{3} = \frac{2\sqrt{3}}{2} + \frac{\pi}{3} \approx 3.82 \\ \text{Nel p.to di massimo ci saranno } 10^{3.82} &\approx 6600 \text{ individui al centimetro quadrato} \end{aligned}$$

ESERCIZIO 4

Si esegue un test T sulle medie. $\mu = 6.6 \rightarrow$ MEDIA DELLA POPOLAZIONE

H_0 : Il campione è stato estratto da una popolazione con media $\mu = 6.6$
 H_1 : Il campione è stato estratto da una popolazione con media $\mu \neq 6.6$

Per eseguire il test devo calcolare $\bar{x}$, s^2 , $n = 9$

$$\bar{x} = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n x_i = \frac{1}{9} (7.5 + 7.1 + 7.4 + 6.1 + 6.7 + 8.2 + 7.6 + 6.4 + 7.8) = \frac{1}{9} (64.8) = 7.2$$

$$\begin{aligned} s^2 &= \frac{1}{n-1} \sum_{i=1}^n (x_i - \bar{x})^2 = \frac{1}{8} [(7.5-7.2)^2 + (7.1-7.2)^2 + (7.4-7.2)^2 + (6.1-7.2)^2 + (6.7-7.2)^2 + (8.2-7.2)^2 + (7.6-7.2)^2 + (6.4-7.2)^2 + (7.8-7.2)^2] \\ &= \frac{1}{8} [(0.3)^2 + (-0.1)^2 + (0.2)^2 + (-1.1)^2 + (-0.5)^2 + (1.0)^2 + (0.4)^2 + (-0.8)^2 + (0.6)^2] = \\ &= \frac{1}{8} [0.09 + 0.01 + 0.04 + 1.21 + 0.25 + 1.0 + 0.16 + 0.64 + 0.36] = \\ &= \frac{1}{8} (3.76) = 0.47 \Rightarrow s = \sqrt{0.47} \approx 0.685 \end{aligned}$$

$$|T_8^*| = \frac{|6.6 - 7.2|}{0.685} \sqrt{9} = \frac{0.6}{\sqrt{0.47}} \cdot 3 \approx 2.625 > 1.860$$

α	0.10	0.05	0.01	0.001
8	1.860	2.306	3.355	5.041

Rifiuto H_0 al 90% di confidenza.

Possiamo affermare al 90% di confidenza che la media nei comuni studiati è diversa dalla media nazionale

b. $\bar{x} = 7.2$

MEDIANA n dispari

$$M = x^{(\frac{n+1}{2})} = x^{(5)} = 7.4$$

$x^{(1)}$	$x^{(2)}$	$x^{(3)}$	$x^{(4)}$	$x^{(5)}$	$x^{(6)}$	$x^{(7)}$	$x^{(8)}$	$x^{(9)}$
6.1	6.4	6.7	7.1	7.4	7.5	7.6	7.8	8.2

Le variabili continue possono assumere qualsiasi valore in un intervallo anche decimale

ES. PESO, ALTEZZA, CONCENTRAZIONE DI UNA SOSTANZA

Le variabili discrete hanno valori interi es. N° DI FIGLI, N° DI INDIVIDUI, etc.